Recensões Críticas

Editor:
Jorge Almeida

Análise Funcional Linear

José Ferreira Alves
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências
Universidade do Porto
e-mail: jfalves@fc.up.pt

Análise Funcional Linear
Editora IST Press
Instituto Superior Técnico, 2011
Tradução portuguesa por Fernando Pestana da Costa
do livro "Linear Functional Analysis", de Bryan Rynne e Martin Youngson

Excetuando possivelmente as edições relativas a um grupo muito restrito de disciplinas normalmente integrando os primeiros anos da parte curricular de licenciaturas em Engenharia ou Economia, as edições de textos de Matemática universitária em Portugal têm como público alvo um universo muito limitado de alunos. Por conseguinte, as tiragens de tais manuais dificilmente poderão atingir grandes números, fazendo isso com que a sua produção não seja suficientemente estimulante na vertente comercial. Sendo esse um fator importante no panorama editorial, felizmente há outros a ter em conta, sendo possível que as publicações universitárias não sejam regidas única e exclusivamente pelos dividendos conferidos pelos grandes números. Dessa forma, ainda vamos tendo boas edições em certas áreas, muitas vezes como consequência do prazer da escrita ou da generosidade dos seus autores.

Uma forma de compensar a carência de publicações a esse nível pode ser pela via da tradução de livros originalmente escritos noutras línguas. É neste contexto que enaltecemos as traduções da IST Press, de cujo leque faz parte o livro *"Análise Funcional Linear"*, por Bryan P. Rynne & Martin A. Youngson, sobre a qual centramos a presente recensão. Sobre a tradução propriamente dita, a cargo de Fernando Pestana da Costa, nada temos a assinalar, o que deve ser interpretado como um elogio por não conter as arreliadoras artificialidades linguísticas que caraterizam certas traduções feitas de forma descuidada, priorizando uma tradução quase literal em detrimento de uma tradução natural.

A Análise Funcional é uma área que hoje em dia tem interações com diversas outras áreas da Matemática, mas que teve na sua génese a missão de encontrar os instrumentos e as técnicas matemáticas apropriadas para um tratamento das equações diferenciais e integrais. Tendo como objetos principais os espaços de funções, a teoria remete de forma natural para os espaços vetoriais de dimensão infinita, não podendo, de forma alguma, ser encarada como fácil de lecionar a um nível precoce da formação matemática de um aluno, não só pela necessidade de conhecimento e bom domínio de algumas matérias prévias como, também, pela necessidade de maturidade e capacidade de abstração difíceis de atingir em fase inicial da formação matemática universitária.

No prefácio deste livro é afirmado pelos seus autores que o livro se destina a ser encarado como uma introdução às ideias e métodos da análise funcional linear, tendo como público alvo os alunos do último ano de uma licenciatura numa universidade britânica. Numa avaliação prévia e muito sucinta sobre tais propósitos do livro, julgamos que cumpre a preceito os objetivos traçados pelos autores, tanto na forma como são abordados os assuntos, como na adequabilidade aos seus destinatários. Podemos, sem grande dose de risco, estender como público alvo do livro alunos do último ano de uma licenciatura numa universidade portuguesa.

O livro inclui um capítulo preliminar com uma abordagem sucinta aos assuntos considerados essenciais pelos autores, onde são revistos conceitos de Álgebra Linear, Espaços Métricos e Integração de Lebesgue. Salientamos o facto de não serem feitas quaisquer referências a espaços topológicos, algo que adquire maior relevância se levarmos em conta que no livro irão ser abordadas as convergências fraca e fraca*. No que às universidades portuguesas diz respeito, não cremos que a componente relativa à Integração de Lebesgue possa ser considerada como uma revisão, pois essa não consta, em geral, dos conteúdos programáticos das disciplinas a um nível de licenciatura, especialmente agora com a formatação das licenciaturas num modelo pós-Bolonha. Independentemente disso, a apresentação do Integral de Lebesgue (e da Medida e Integração, mais em geral) parece-nos ser feita de forma bastante clara e com suficiente detalhe para ser compreendida mesmo por alunos que nunca tenham tido nenhum contacto com a Medida e Integração, mesmo levando em conta que os resultados são apresentados sem demonstração.

O terceiro capítulo visa alguns resultados básicos sobre espaços vetoriais normados. Entre outros, é aqui demonstrado que, num espaço normado de dimensão infinita, a bola fechada (unitária) e a esfera (unitária) não são compactas. As considerações sobre a falta de compacidade da bola fechada em espaços de dimensão infinita estão já numa secção sobre espaços de Banach. Entendemos que sirvam como motivação para a introdução de um tal conceito, mas julgamos que teria sido mais adequado incluir essa discussão na secção anterior, numa exposição global com considerações sobre dimensão e compacidade da bola fechada. Aliás, julgamos que teria sido interessante acrescentar o resultado de que a bola fechada é sempre compacta em espaços de dimensão finita, deixando dessa forma caraterizada a finitude da dimensão de um espaço normado através da compacidade das suas bolas fechadas.

O capítulo seguinte é dedicado aos espaços vetoriais com produto interno (real ou complexo) e, posteriormente, àqueles cuja norma correspondente confere ao espaço uma estrutura de espaço métrico completo: espaços de Hilbert. É feita uma introdução natural ao conceito de ortogonalidade e é apresentada uma noção de base ortonormal. Em determinado momento é colocada a interessante questão de se saber se todo o espaço de Hilbert tem alguma base ortonormal. A resposta é logo dada pela negativa, uma vez que na definição de base ortonormal é exigida a numerabilidade do conjunto. Julgamos que teria sido mais interessante ter sido introduzido o conceito de base ortonormal em geral (não necessariamente numerável) e posteriormente caraterizar os espaços de Hilbert separáveis como aqueles que têm uma base ortonormal numerável. Mesmo não tendo sido essa a definição apresentada neste livro, pensamos que teria sido enriquecedor mencionar que numa definição menos restritiva, todo o espaço de Hilbert possui, de facto, alguma base ortonormal. Talvez a definição adotada e a não apresentação desse resultado mais geral tenha tido como objetivo evitar o Lema de Zorn. Contudo, esse aparecerá inevitavelmente pouco mais adiante, na prova do Teorema de Hahn-Banach. Mais adiante, no quarto capítulo, após algumas considerações inevitáveis sobre operadores lineares, é demonstrado que, num certo sentido, todo o espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isometricamente isomorfo ao espaço l^2 (o espaço das sucessões de quadrado somável). Teria sido interessante demonstrar (ou até deixar esquematizado como exercício) que todo o espaço de dimensão finita é isometricamente isomorfo a algum C^n.

O quinto capítulo visa uma introdução à teoria de operadores e tem uma secção inicial com considerações gerais sobre a continuidade (uniforme) dos operadores lineares, a definição de operador limitado, a sua norma, e a completude do espaço dos operadores. A secção seguinte é, em grande parte, dedicada ao problema do inverso de um operador linear, sendo aí definido como invertível um operador que, como função que é, tem inversa e, adicionalmente, essa inversa é contínua. É uma opção seguida em alguma literatura, mas que julgamos poder dar azo a alguma confusão sobre o que é o cerne da discussão: a continuidade do operador inverso. Tal é obtido como um resultado geral em espaços de Banach como Corolário do Teorema da Aplicação Aberta. Lamentamos que este teorema seja apresentado com um enunciado demasiado técnico, não deixando em evidência o facto facilmente memorizável de que uma aplicação linear contínua sobrejetiva entre espaços de Banach envia conjuntos abertos em conjuntos abertos. A apresentação destes resultados é naturalmente motivada pelo facto de que nem sempre a inversa de um operador linear contínuo é um operador contínuo, algo que é afirmado, mas não ilustrado através de um exemplo. Nem como exercício.

No capítulo seguinte são apresentados alguns resultados sobre a dualidade de espaços e o Teorema de Hahn-Banach. Este último é apresentado primeiro na sua versão em espaço real (a demonstrar posteriormente, com recurso ao Lema de Zorn), da qual se deduz depois a versão complexa. Pelo meio, é apresentada uma interessante versão sobre extensões de funcionais lineares em espaços normados separáveis com uma demonstração relativamente simples. Esta secção termina com algumas aplicações geométricas do Teorema de Hahn-Banach sobre separação por hiperplanos. A secção seguinte aborda a questão da reflexividade dos espaços normados. Assinala o facto importante de que, na definição de reflexividade, o isomorfismo dever ser a inclusão canónica, mencionando a existência de espaços isomorfos ao seu bidual que não são reflexivos. É certo que certos contra-exemplos em Análise Funcional por vezes adquirem um nível de sofisticação e profundidade não compatíveis com o âmbito deste livro, mas achamos que valeria a pena tê-lo deixado como referência. Este capítulo continua com uma secção sobre projeções e espaços complementares e termina com uma secção dedicada às convergências fraca e fraca*. Para motivar uma abordagem sem recurso aos espaços topológicos, é considerado primeiramente o caso de espaço normado separável, caso em que a topologia fraca* é metrizável, motivando dessa forma a definição. A secção termina com o Teorema de Banach-Alaoglu (estranhamente não designado como tal) e alguns corolários.

O sexto capítulo é totalmente dedicado aos operadores lineares em espaços de Hilbert, começando por uma secção com considerações sobre o operador adjunto, passando depois pelos operadores auto-adjuntos, normais e unitários. Na secção seguinte é apresentada a definição de espectro de um operador, sendo dadas algumas das suas propriedades básicas. Tanto na definição de espectro como em alguns dos resultados desta secção são incluídos itens específicos sobre o caso particular das matrizes. Numa exposição introdutória à Análise Funcional, consideramos importante fazer-se um paralelismo com as matrizes, mas julgamos que seria mais interessante para o desenrolar do texto que tal fosse deixado sob a forma de exemplos ou mesmo nos exercícios. Este capítulo termina com uma secção dedicada aos operadores positivos, chegando à prova de que todo operador invertível num espaço de Hilbert pode ser escrito como produto de um operador unitário por um operador positivo.

O sétimo capítulo trata de uma introdução aos operadores compactos em espaços normados, desenvolvendo depois a teoria para operadores compactos em espaços de Hilbert e chegando ao Teorema Espectral para operadores compactos auto-adjuntos e à Alternativa de Fredholm. O capítulo termina com algumas considerações sobre equações bem postas.

No capítulo seguinte são feitas algumas aplicações dos resultados do livro a equações integrais e equações diferenciais, sendo em particular estudadas equações integrais de Fredholm, equações integrais de Volterra e problemas de valores iniciais. No que toca a aplicações muitas outras escolhas poderiam ter sido feitas, mesmo em outras áreas da Matemática, mas as escolhas feitas parecem-nos sensatas e bem ilustrativas da utilidade da última parte da teoria.

O livro inclui um último capítulo com algo geralmente muito apreciado pelos alunos: a resolução dos exercícios.

Pelos motivos expostos, não temos dúvidas em recomendar este livro, considerando-o mesmo um excelente manual para um curso introdutório de Análise Funcional.